Cours du 12.04.2021
lundi, 12 avril 2021 18:00

<u>Examen le 26.04.2021</u>

Vecteurs / Matrices

NOTE FINALE SEMESTRE = 0.5*(N_Exam_26.04 + N_TP_PROB_STATS)

<u>Calculs d'intersection : Ex. 2 série 16</u>

Trouver l'intersection d'un plan qui contient les 3 points suivants :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{B}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}, \underset{C}{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Avec la droite passant par $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de dir. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

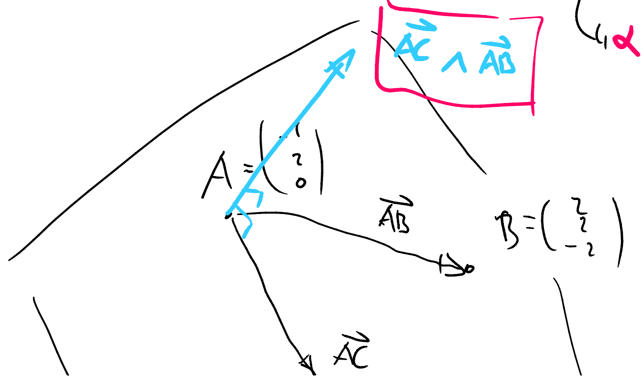
RAPPEL : le plan PERPENDICULAIRE à la direction $\vec{x}$ calcul $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

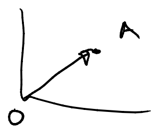
$$\overset{\alpha}{x_1} p_1 + \overset{\beta}{x_2} p_2 + \overset{\gamma}{x_3} p_3 - \overset{\delta}{(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)}$$

QUESTION : ici nous avons 3 points dans le plan, mais pas de direction perpendiculaire ???

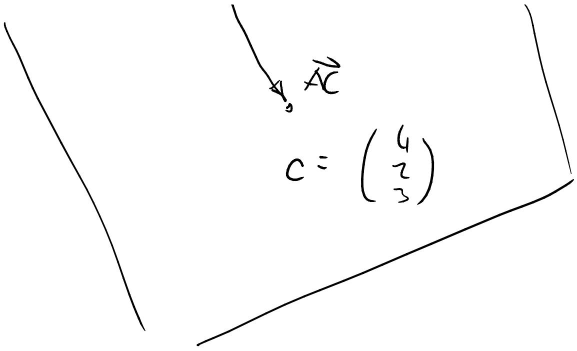
1) $\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 + \delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} -1\alpha + 2\beta + 0\gamma + \delta = 0 & \Rightarrow A \in \text{Plan} \\ 2\alpha + 2\beta - 2\gamma + \delta = 0 & \Rightarrow B \in \text{Plan} \\ 4\alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = 0 & \Rightarrow C \in \text{Plan} \end{cases}$

2)





$\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$



$\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$

$$\vec{AC} \wedge \vec{AB} = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\19\\0\end{pmatrix}$$

5 3

0 0

Si le plan est PERPENDICULAIRE au vecteur ci-dessus, il est aussi perpendiculaire au vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\overset{0}{\cancel{x_1}}p_1 + \overset{1}{\cancel{x_2}}p_2 + \overset{0}{\cancel{x_3}}p_3 - (\underset{2}{b_1}\overset{0}{\cancel{x_1}} + \underset{2}{b_2}\overset{1}{\cancel{x_2}} + \underset{-2}{b_3}\overset{0}{\cancel{x_3}})$$

$$\boxed{1 \cdot p_2 - 2 = 0} \Rightarrow \text{Plan } p_2 = 2 \;!$$

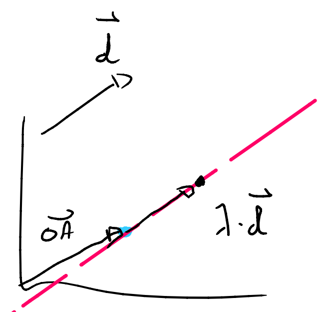
Quelle est son intersection avec la droite passant par $\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$
De direction parallèle à $\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$

On veut donc trouver le point $\vec{OI} = \begin{pmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{pmatrix}$ Qui $\underbrace{\text{est sur le plan}}_{\text{I}}$ ET sur la

La droite.... II

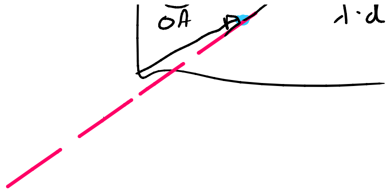
$$\begin{cases} \text{I} \quad 0 \cdot i_1 + i_2 + 0 \cdot i_3 - 2 = 0 \quad (i_2 = 2) \\ \text{II} \Rightarrow \vec{OI} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{pmatrix} \end{cases}$$

II



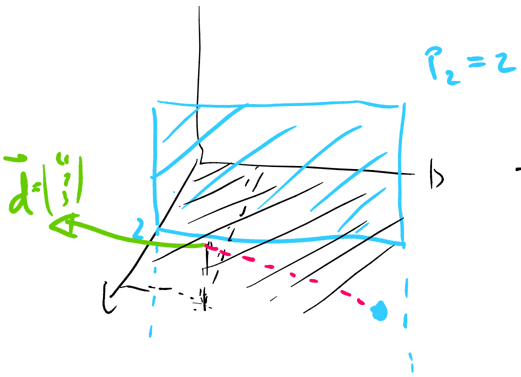
$\begin{cases} i_2 = 2 \quad \text{I} \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l} i_2 = 2 \quad \mathrm{I} \\ \left.\begin{array}{l} i_1 = 1+4\lambda \\ i_2 = 5+2\lambda \\ i_3 = 2+3\lambda \end{array}\right\} \mathrm{II} \end{array}\right.$$



$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} i_2 = 2 \\ 5+2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \\ i_1 = 1+4\left(-\frac{3}{2}\right) = -5 \\ i_3 = 2+3\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2} = -2{,}5 \end{array}\right.$$

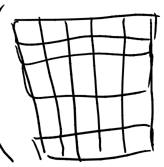
le point d'intersection est $I = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$



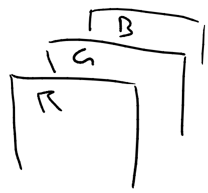
MAL DESSINÉ !!

Chapitre : Calcul Matriciel

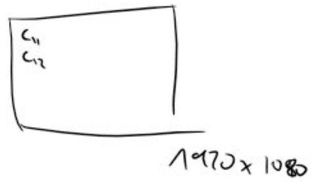
Qu'est qu'une matrice : c'est un tableau A 2 DIMENSIONS qui contient des "valeurs" scalaires.

Matrice $A_{n\times m} = \Big($  $\Big)_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m}$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, n$
$j = 1, \ldots, m$



Addition matricielle :



$$+ : \mathbb{R}_{n\times m} \times \mathbb{R}_{n\times m} \longmapsto \mathbb{R}_{n\times m}$$

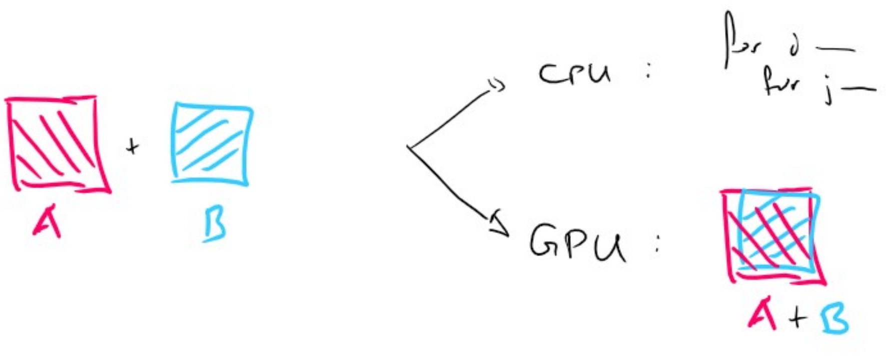
$$A_{n\times m} + B_{n\times m} = C_{n\times m} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_{11} & c_{12} & \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}+b_{11}} & \boxed{a_{12}+b_{12}} & \cdots \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{n\times m} \end{array}$$

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \begin{array}{l} i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m \end{array}} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{for } i=1\dots n \\ \quad \text{for } j=1\dots m \\ \qquad c_{ij} = a_{ij}+b_{ij} \end{array} \quad \boxed{\text{CPU}}$$

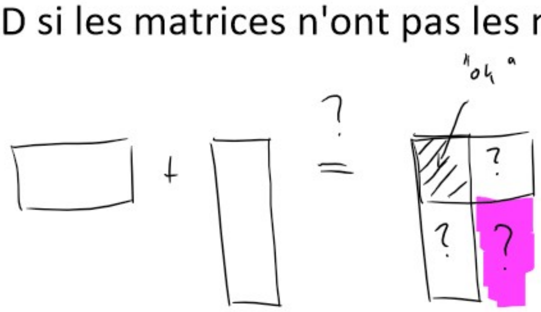
$$A+B+C = (A+B)+C = A+(B+C) \quad \text{ASSOCIATIF}$$

On prouve que c'est vrai !

$$A+B = B+A \quad \text{COMMUTATIF}$$



QUID si les matrices n'ont pas les mêmes dimensions ??



ATTENTION: l'addition MATRICIELLE ne fait de sens QUE si les deux matrices additionnées ont la même dimensions !!!!!!

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \; \times \; \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad ?$$

$$\Downarrow$$

$$X_{2\times 1} \qquad Y_{3\times 1}$$

Scalaire "3" ou "π" matrices 1×1 ?

Multiplication par un scalaire

$$\lambda A_{n\times m} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, m \end{matrix}$$

Produit Matriciel

$$A \times B = C$$

⚠ DIMENSIONS !!!

$$\times : \mathbb{R}_{n\times m} \times \mathbb{R}_{m\times p} \Rightarrow \mathbb{R}_{n\times p}$$

ÉGAUX

PAS COMMUTATIF

La multiplication matricielle est-elle commutative ?
Pourquoi ?

oui/non 1 pt

pourquoi $\exists$ pbs $\quad C_{1\times 2} = A_{1\times 3} \times B_{3\times 2}$ ou $\neq$ (contre-exemple)

$B_{3\times 2} \times A_{1\times 3}$ PAS Défini

Produit scalaire de 2 vecteurs est en fait un produit matriciel !

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}_{\text{SCALAIRE}}$$

$$X_{1\times 3} \times Y_{3\times 1} = C_{1\times 1}$$

$\vec{y}$!

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}_{1\times 3} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{pmatrix}_{1\times 1}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow X_{1\times 3} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \vec{x}^{\,T}$$

vecteur ligne

TRANSPOSÉE

TRANSPOSEE $\quad A_{n\times m} \quad (A^T)_{m\times n}$

$$a_{ij} \longrightarrow a_{ji} \qquad i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, m$$

C_1 C_2

$\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}_{4\times 2} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 4} \quad \begin{array}{l} c_1 \to l_1 \\ c_2 \to l_2 \end{array}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prod} \\ \text{mat}}}{\cdot} \vec{y}$$

$$\boxed{(A^T)^T = A_{n\times m}}$$

$$B_{m\times n} = A^T \Rightarrow b_{ij} = a_{ji} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

$j = l$
$k = i$

$$C_{n\times m} = B^T \Rightarrow c_{kl} = b_{lk} \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} k = 1, \dots, n \\ l = 1, \dots, m \end{array}$$

$$= a_{lk}$$

$$c_{kl} = a_{kl} \qquad \Rightarrow C_{n\times m} = A_{n\times m}$$

$$(C - A = O_{n\times m})$$